XII Всероссийская смена «Юный математик».
ВДЦ «Орлёнок»
XI Южный математический турнир.
22 сентября 2016 года.
2 тур. Старт-лига высшая. *Решения*.

1. Известно, что О·Р·Л·Ё·Н·О·К = 2016 (*одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, а разные – разными*). Найдите наибольшее возможное значение числа ОРЁЛ.

Ответ: 2764, где, например, О·Р·Л·Ё·Н·О·К=2·7·4·6·3·2·1.***Решение:*** $2016=2^5\cdot3^2\cdot7$ – всего 8 простых множителей трёх видов. Из пяти цифр, отличных от О, хотя бы 4 будут больше 1, при этом максимум три из них простые, значит, на них уйдёт хотя бы 5 простых множителей. Тогда двум цифрам *О* достанется не более трёх простых множителей, значит, О либо простое число (3 или 2), либо 1. В случае О=3, из пяти остальных цифр хотя бы 3 будут степенью двойки, но тогда им надо 1+2+3=6 двоек, чего у нас нет. Если О=2, то из 6 остальных простых множителей набор 4 отличных от 1 и 2 цифр можно составить единственным образом – 7, 3, 2·3=6, 2^2=4. Тогда максимальным четырехзначным числом будет 2764.

2. В компании 9 школьников, некоторые из которых враждуют друг с другом. Время от времени учитель назначает одного из школьников старостой, и тот сразу же ссорится со всеми своими друзьями, но зато начинает дружить с теми, с кем до этого враждовал. Затем учитель назначает нового старосту, и всё происходит таким же образом. Докажите, что учитель может действовать так, что в компании останется не более 16 враждующих пар.

***Доказательство*:** Назовём школьника *агрессивным*, если у него в компании хотя бы 5 врагов. Тогда учитель будет поступать следующим образом – любого агрессивного школьника назначать старостой, пока агрессивные школьники есть или появляются в процессе изменения старостами своих приоритетов в дружбе. Но т.к. агрессивный школьник меняет минимум 5 врагов на максимум 3, то на каждом назначении старост учитель избавляет компанию хотя бы от 2 враждующих пар. В результате, либо в некоторый момент при наличии агрессивных школьников количество враждующих пар станет не больше 16 (что и требовалось), либо в компании не будет агрессивных школьников. Если в компании нет агрессивных школьников, то у каждого школьника не более 4 врагов и всего не более 9·4/2=18 враждующих пар. Значит, либо теперь у нас уже не больше 16 враждующих пар (что и требовалось), либо 17 пар (у двух человек по 3 врага, у остальных – по 4), либо 18 пар (у всех по 4 врага). В двух последних случаях учитель назначает старостой любого из имеющих 4 врага, сохраняя количество враждующих пар. Староста меняет приоритеты, тогда среди его 4 бывших друзей появляется агрессивный (т.к. хотя бы у двух бывших друзей уже есть по 4 врага). Теперь учитель назначает этого агрессивного старостой, количество враждующих пар уменьшается хотя бы на 2 и становится не большим 16, что и требовалось.

3. На стене висят часы с тремя стрелками – часовой, минутной и секундной. В полдень на секундную стрелку часов села фея и поехала на ней. В момент, когда стрелка с феей равняется с другой стрелкой, фея перелетает на эту новую стрелку. Сколько кругов сделает фея за 12 часов? (Известно, что все три стрелки сходятся вместе только в полдень и в полночь.)

Ответ: 245 кругов. ***Доказательство* (красивое:☺):** Посадим изначально на часовую и минутную стрелки по одной мухе. Будем считать, что в момент встречи стрелок фея и соответствующая муха меняются местами, и мухи также меняются местами в момент встречи между собой. В результате фея сохраняет своё преимущество в количестве пройденных кругов перед первой мухой (поехавшей изначально на минутной стрелке), но не более чем на один круг, первая муха сохраняет аналогично своё преимущество перед второй мухой. В результате фея и две мухи в сумме проедут $12\cdot60+12+1=733$ круга, при этом фея обогнала первую муху максимум на круг, а первая муха обогнала вторую максимум на круг. $733\equiv1 \pmod 3$, значит, возможен только вариант, когда фея обогнала на 1 круг обеих мух, проехавших поровну кругов. Значит, фея проехала $(733+2):3=245$ кругов.

4. При каких натуральных *n* число n^4+n^2 делится на $2n+1$?

Решение: $n^4+n^2=n^2(n^2+1)$, но n^2 и $2n+1$ – взаимно просты, значит, на нечётное число $2n+1=a\geq3$ делится $n^2+1=\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+1=\frac{a^2-2a+5}{4}$. Значит, нечётное число $a\geq3$ является делителем натурального числа a^2-2a+5, тогда $5\,\vdots\,a$ и $a=5$, откуда $n=2$ и $n^2+1=2^2+1=5\,\vdots\,5$.

5. На доске написано выражение 1!·2!·3!·…·2016!. Удалите один из множителей так, чтобы произведение стало квадратом.

Ответ: удалим 1008! ***Доказательство:*** вынесем последний множитель у каждого факториала чётного числа, после чего у каждого такого числа заберём одну двойку, тогда получим, что $1!\cdot2!\cdot3!\cdot\ldots\cdot2016! = (1!\cdot1!\cdot3!\cdot3!\cdot5!\cdot5!\cdot\ldots\cdot2015!\cdot2015!)\cdot2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2016 = (1!\cdot3!\cdot5!\cdot\ldots\cdot2015!)^2\cdot2^{1008}\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot1008 = N^2\cdot1008!$, где $N=1!\cdot3!\cdot5!\cdot\ldots\cdot2015!\cdot2^{504}$. Значит, убрав множитель 1008!, мы получим, что оставшееся произведение станет точным квадратом.

6. Дан прямоугольный треугольник *ABC* (*∠C=90°*). На гипотенузе *AB* выбрали точку *D* так, что *AB*=2*CD*. Найти углы треугольника *ABC*, если известно, что ∠*ACD*=27°.

Ответ: (27°, 63°, 90°) или (51°, 39°, 90°). ***Решение*:** Заметим, что медиана из прямого угла равна половине гипотенузы, значит, *CD*=*CM*, где *M* – середина *AB*, следовательно, существует 3 случая расположения точки *D* относительно *M* на гипотенузе. <u>1 случай</u>. *D* лежит внутри отрезка *MB* (см. рис. 1). Пусть $\angle A=\alpha$, тогда из равнобедренного треугольника *AMC* получаем, что внешний $\angle CMD=2\alpha$, а из равнобедренного треугольника CMD получаем, что $\angle CDM=2\alpha$. Тогда в треугольнике ADC сумма углов равна $\alpha+2\alpha+27°=180°$, значит, $\alpha=51°$, а $\angle ACD=27°$ больше своей части $\angle ACM=\alpha=51°$ – противоречие. Значит, такой случай невозможен.

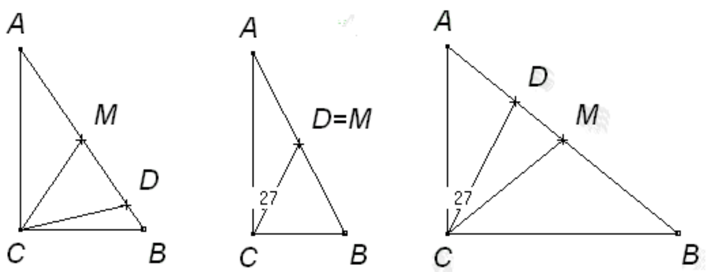

рис.1 рис.2 рис.3

<u>2 случай</u>. *D* =*M* (см. рис. 2). Тогда в силу равнобедренности треугольника *AMC* имеем $\angle BAC=\angle MAC=\angle 27°$, $\angle ABC=90°-27°=63°$.

<u>3 случай</u>. *D* лежит внутри отрезка *MA* (см. рис. 1). Пусть $\angle A=\alpha$, тогда в равнобедренном треугольнике *AMC* получаем, что $\angle AMC=180°-2\alpha$, значит, в равнобедренном треугольнике *CDM* получаем, что $\angle CDM=\angle DMC=\angle AMC=180°-2\alpha$. Но $\angle CDM$ –

внешний угол треугольника CDA, значит, $\angle CDM = \angle ACD + \angle CAD = 27° + \alpha$. Получаем уравнение $180° – 2\alpha = 27° + \alpha$, откуда $\alpha = 51°$. Значит, $\angle B = 90° – 51° = 39°$.

7. Существует ли выпуклый 22016-угольник, все углы которого выражаются целым числом угловых минут? (Угловой градус равен 60 угловым минутам.)

Ответ: не существует.

Решение: Сумма внешних углов многоугольника равна $360 \cdot 60 = 21600$ минутам, что меньше 22016, значит, будут внешние углы, меньшие 1 минуты, тогда соответствующие внутренние углы не будут целочисленными (в минутах).

8. Сергей Геннадьевич пять раз подряд написал на доске число 2016. Сколькими способами Олег Иванович может вычеркнуть часть цифр, чтобы на доске осталось число 2016?

Ответ: 70. ***Решение* 1:** Всего существует 5 блоков (число 2016), тогда Олег Иванович мог оставить цифры из 1, 2, 3 или 4 блоков. Выбор n блоков равен числу сочетаний из 5 по n. При этом выбор одного блока даёт 1 вариант числа (сам блок), выбор двух блоков даёт 3 варианта (2, 016), (20, 16), (201, 6) выбора цифр из этих блоков, выбор трёх блоков даёт 3 варианта (2, 0, 16), (2, 01, 6), (20, 1, 6), выбор четырёх блоков даёт 1 вариант(2, 0, 1, 6). Значит, всего $C_5^1 + 3C_5^2 + 3C_5^3 + C_5^4 = 5 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 5 = 70$ вариантов оставить число 2016.

***Решение* 2:** Воспользуемся методом «шаров и перегородок». Пусть у нас есть 5 корзин-блоков (из цифр 2016) и нам надо в них положить 4 шарика, тогда по распределению шариков мы однозначно восстанавливаем оставленные цифры. Любой способ положить 4 шарика в 5 корзин кодируется 4 единицами-шариками и 4 нулями-перегородками, а количество таких кодов равно количеству способов расставить на 8 местах 4 единицы и 4 нуля, т.е. $C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$.

Комментарий: Если применить свойство суммы соседних сочетаний $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, то ответ-сумма из первого решения плавно превращается в ответ-сочетание во втором решении:

$$C_5^1 + 3C_5^2 + 3C_5^3 + C_5^4 = (C_5^1 + C_5^2) + 2(C_5^2 + C_5^3) + (C_5^3 + C_5^4) = C_6^2 + 2C_6^3 + C_6^4 =$$
$$= (C_6^2 + C_6^3) + (C_6^3 + C_6^4) = C_7^3 + C_7^4 = C_8^4.$$

***Решение* 3 (динамическое программирование):** Рассмотрим таблицу, в которой в верхней строке написаны подряд все цифры нашей последовательности, в левом столбце указаны созданные вычёркиванием числа, а на пересечении строки и столбца указано, сколькими различными способами можно оставить соответствующую (в строке) комбинацию цифр из имеющегося набора цифр (слева направо до цифры, написанной вверху столбца). Таблица заполняется слева направо по строкам. Сумми-

	2	0	1	6	2	0	1	6	2	0	1	6	2	0	1	6	2	0	1	6
2	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5
20	0	1	1	1	1	3	3	3	3	6	6	6	6	10	10	10	10	15	15	15
201	0	0	1	1	1	1	4	4	4	4	10	10	10	10	20	20	20	20	35	35
2016	0	0	0	1	1	1	1	5	5	5	5	15	15	15	15	35	36	35	35	70

рование чисел (из соседних 2 клеток слева и слева-сверху) происходит в том момент, когда появляется новая цифра, являющаяся концом рассматриваемой комбинации. Например, при появлении 3-й единицы мы получаем в строке «201» число 10, складывая 6 и 4, соответствующие 6 способам выбрать комбинацию «20» и 4 способам выбрать комбинацию «201» из последовательности 2016201620. В результате, нужное нам число способов (70) стоит в самой правой нижней клетке таблицы.

2 тур. Старт-лига первая. *Решения.*

1. Известно, что О·Р·Л·Ё·Н·О·К = 2016 (*одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, а разные – разными*). Найдите наибольшее возможное значение числа ОРЁЛ.

Ответ: 2764, где, например, О·Р·Л·Ё·Н·О·К=2·7·4·6·3·2·1.***Решение:*** $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$ – всего 8 простых множителей трёх видов. Из пяти цифр, отличных от О, хотя бы 4 будут больше 1, при этом максимум три из них простые, значит, на них уйдёт хотя бы 5 простых множителей. Тогда двум цифрам О достанется не более трёх простых множителей, значит, О либо простое число (3 или 2), либо 1. В случае О=3, из пяти остальных цифр хотя бы 3 будут степенью двойки, но тогда им надо 1+2+3=6 двоек, чего у нас нет. Если О=2, то из 6 остальных простых множителей набор 4 отличных от 1 и 2 цифр можно составить единственным образом – 7, 3, $2\cdot 3=6$, $2^2=4$. Тогда максимальным четырехзначным числом будет 2764.

2. В компании 9 школьников, некоторые из которых враждуют друг с другом. Время от времени учитель назначает одного из школьников старостой, и тот сразу же ссорится со всеми своими друзьями, но зато начинает дружить с теми, с кем до этого враждовал. Затем учитель назначает нового старосту, и всё происходит таким же образом. Докажите, что учитель может действовать так, что в компании останется не более 16 враждующих пар.

***Доказательство*:** Назовём школьника *агрессивным*, если у него в компании хотя бы 5 врагов. Тогда учитель будет поступать следующим образом – любого агрессивного школьника назначать старостой, пока агрессивные школьники есть или появляются в процессе изменения старостами своих приоритетов в дружбе. Но т.к. агрессивный школьник меняет минимум 5 врагов на максимум 3, то на каждом назначении старост учитель избавляет компанию хотя бы от 2 враждующих пар. В результате, либо в некоторый момент при наличии агрессивных школьников количество враждующих пар станет не больше 16 (что и требовалось), либо в компании не будет агрессивных школьников. Если в компании нет агрессивных школьников, то у каждого школьника не более 4 врагов и всего не более $9\cdot 4/2=18$ враждующих пар. Значит, либо теперь у нас уже не больше 16 враждующих пар (что и требовалось), либо 17 пар (у двух человек по 3 врага, у остальных – по 4), либо 18 пар (у всех по 4 врага). В двух последних случаях учитель назначает старостой любого из имеющих 4 врага, сохраняя количество враждующих пар. Староста меняет приоритеты, тогда среди его 4 бывших друзей появляется агрессивный (т.к. хотя бы у двух бывших друзей уже есть по 4 врага). Теперь учитель назначает этого агрессивного старостой, количество враждующих пар уменьшается хотя бы на 2 и становится не большим 16, что и требовалось.

3. На стене висят часы с двумя стрелками – часовой и минутной. В полдень на секундную стрелку часов села муха и поехала на ней. В момент, когда стрелка с мухой равняется с другой стрелкой, муха перелетает на эту новую стрелку. Сколько кругов сделает муха за 12 часов?

Ответ: 7 кругов. ***Доказательство*:** Посадим на каждую стрелку по одной мухе. Будем считать, что в момент встречи стрелок мухи меняются местами и лидирующая муха (поехавшая изначально на минутной стрелке и нужная нам) сохраняет своё преимущество в количестве пройденных кругов, но не более чем на один круг. В результате они в сумме проедут 12+1=13 кругов, но лидирующая муха (нужная нам) проедет (13+1):2=7 кругов.

4. Таня уронила в речку мячик. От Троицкого моста до Дворцового мячик плыл 25 минут. Сама Таня за такое время может проплыть от Дворцового моста до Троицкого. Сколько времени потребуется Тане, чтобы проплыть от Троицкого моста до Дворцового?

Ответ: 25/3 минуты или 8 минут 20 секунд. ***Решение:*** Пусть расстояние от Троицкого до Дворцового моста равно S (метров), значит, скорость реки $S/25$ (метров в минуту). Пусть скорость Тани V м/мин, тогда $S=25(V–S/25)$, т.к. Таня расстояние S проплывает за 25 минут против течения реки. Отсюда находим, что $V=2S/25$. Значит, когда Таня плывёт от Троицкого до Дворцового по течению реки со скоростью $V+S/25=3S/25$, она тратит на путь длиной S время, равное $S:(3S/25)=25/3$ минуты

5. В мешке находится 57 кг золотого песка. Как за три взвешивания отмерить ровно 12 кг песка, используя чашечные весы и гирю массой 1 кг?

Решение: Первое взвешивание – 29 кг против 28 кг и гири, второе взвешивание – из 29 кг получаем 15 кг против 14 кг и гири, третье взвешивание – из 28 кг отсыпаем 16 кг, уравновешивая их с 15 кг и гирей. Значит, у нас из 28 кг останутся нужные нам 12 кг.

6. Дан прямоугольный треугольник *ABC* (*∠C=90°*). На гипотенузе *AB* выбрали точку *D* так, что *AB*=2*CD*. Найти углы треугольника *ABC*, если известно, что ∠*ACD*=27°.

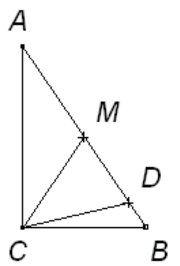

рис.1

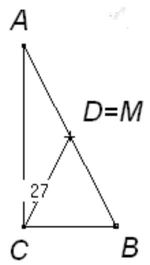

рис.2

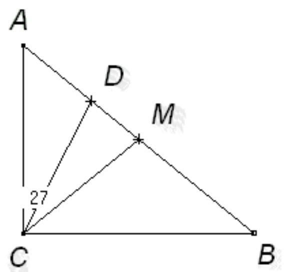

рис.3

Ответ: (27°, 63°, 90°) или (51°, 39°, 90°). ***Решение*:** Заметим, что медиана из прямого угла равна половине гипотенузы, значит, $CD=CM$, где M – середина AB, следовательно, существует 3 случая расположения точки D относительно M на гипотенузе. <u>1 *случай*</u>. D лежит внутри отрезка MB (см. рис. 1). Пусть $\angle A=\alpha$, тогда из равнобедренного треугольника AMC получаем, что внешний $\angle CMD=2\alpha$, а из равнобедренного треугольника CMD получаем, что $\angle CDM=2\alpha$. Тогда в треугольнике ADC сумма углов равна $\alpha+2\alpha+27°=180°$, значит, $\alpha=51°$, а $\angle ACD=27°$ больше своей части $\angle ACM=\alpha=51°$ – противоречие. Значит, такой случай невозможен.

<u>2 *случай*</u>. $D=M$ (см. рис. 2). Тогда в силу равнобедренности треугольника AMC имеем $\angle BAC=\angle MAC=\angle 27°$, $\angle ABC=90°–27°=63°$.

<u>3 *случай*</u>. D лежит внутри отрезка MA (см. рис. 1). Пусть $\angle A=\alpha$, тогда в равнобедренном треугольнике AMC получаем, что $\angle AMC=180°–2\alpha$, значит, в равнобедренном треугольнике CDM получаем, что $\angle CDM=\angle DMC=\angle AMC=180°–2\alpha$. Но $\angle CDM$ – внешний угол треугольника CDA, значит, $\angle CDM=\angle ACD+\angle CAD=27°+\alpha$. Получаем уравнение $180°–2\alpha=27°+\alpha$, откуда $\alpha=51°$. Значит, $\angle B=90°–51°=39°$.

7. Существует ли выпуклый 2016-угольник, все углы которого выражаются целым числом градусов?

Ответ: не существует.
Решение: Сумма внешних углов многоугольника равна 360 градусам, что меньше 2016, значит, будут внешние углы, меньшие 1 градуса, тогда соответствующие внутренние углы не будут целочисленными.

8. Сергей Геннадьевич пять раз подряд написал на доске число 2016. Сколькими способами Олег Иванович может вычеркнуть часть цифр, чтобы на доске осталось число 2016?

Ответ: 70. ***Решение 1:*** Всего существует 5 блоков (число 2016), тогда Олег Иванович мог оставить цифры из 1, 2, 3 или 4 блоков. Выбор n блоков равен числу сочетаний из 5 по n. При этом выбор одного блока даёт 1 вариант числа (сам блок), выбор двух блоков даёт 3 варианта (2, 016), (20, 16), (201, 6) выбора цифр из этих блоков, выбор трёх блоков даёт 3 варианта (2, 0, 16), (2, 01, 6), (20, 1, 6), выбор четырёх блоков даёт 1 вариант (2, 0, 1, 6). Значит, всего $C_5^1+3C_5^2+3C_5^3+C_5^4=5+3\cdot 10+3\cdot 10+5=70$ вариантов оставить число 2016.

Решение 2: Воспользуемся методом «шаров и перегородок». Пусть у нас есть 5 корзин-блоков (из цифр 2016) и нам надо в них положить 4 шарика, тогда по распределению шариков мы однозначно восстанавливаем оставленные цифры. Любой способ положить 4 шарика в 5 корзин кодируется 4 единицами-шариками и 4 нулями-перегородками, а количество таких кодов равно количеству способов расставить на 8 местах 4 единицы и 4 нуля, т.е. $C_8^4=\frac{8!}{4!\cdot 4!}=70$.

Комментарий: Если применить свойство суммы соседних сочетаний $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$, то ответ-сумма из первого решения плавно превращается в ответ-сочетание во втором решении:

$$C_5^1+3C_5^2+3C_5^3+C_5^4=(C_5^1+C_5^2)+2(C_5^2+C_5^3)+(C_5^3+C_5^4)=C_6^2+2C_6^3+C_6^4=$$
$$=(C_6^2+C_6^3)+(C_6^3+C_6^4)=C_7^3+C_7^4=C_8^4.$$

Решение 3 (динамическое программирование): Рассмотрим таблицу, в которой в верхней строке написаны подряд все цифры нашей последовательности, в левом столбце указаны созданные вычёркиванием числа, а на пересечении строки и столбца указано, сколькими различными способами можно оставить соответствующую (в строке) комбинацию цифр из имеющегося набора цифр (слева направо до цифры, написанной вверху столбца). Таблица заполняется слева направо по строкам. Суммирование чисел (из соседних 2 клеток слева и слева-сверху) происходит в том момент, когда появляется новая цифра, являющаяся концом рассматриваемой комбинации. Например, при появлении 3-й единицы мы получаем в строке «201» число 10, складывая 6 и 4, соответствующие 6 способам выбрать комбинацию «20» и 4 способам

	2	0	1	6	2	0	1	6	2	0	1	6	2	0	1	6	2	0	1	6
2	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5
20	0	1	1	1	1	3	3	3	3	6	6	6	6	10	10	10	10	15	15	15
201	0	0	1	1	1	1	4	4	4	4	10	10	10	10	20	20	20	20	35	35
2016	0	0	0	1	1	1	1	5	5	5	5	15	15	15	15	35	36	35	35	70

выбрать комбинацию «201» из последовательности 2016201620. В результате, нужное нам число способов (70) стоит в самой правой нижней клетке таблицы.