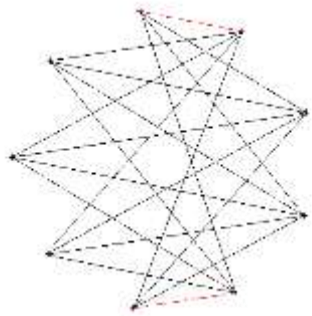
XII Всероссийская смена «Юный математик».
ВДЦ «Орлёнок»
XI Южный математический турнир.
24 сентября 2016 года.
3 тур. Старт-лига высшая. *Решения*.

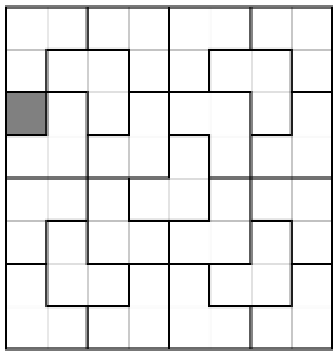
1. Какое наибольшее количество диагоналей можно провести в выпуклом девятиугольнике, чтобы никакие три из них не образовывали треугольник с вершинами в вершинах девятиугольника?



Ответ: 18. ***Пример:*** Например, разобьём вершины на две группы (5 и 4) подряд идущих вершин и проведём все диагонали между вершинами из разных групп, всего 5·4–2=18 диагоналей (см. рис.). 2 отрезка между соседними вершинами из разных групп будут стороной, а не диагональю (отмечены пунктиром, как не проведённые). Получается двудольный граф, в котором по критерию двудольности все циклы чётные, значит, нет треугольника из рёбер (цикла длины 3), ***Доказательство оценки*:** Если же у нас проведено хотя бы 19 диагоналей, то сумма степеней всех вершин будет не меньше 2·19=38, значит, по принципу Дирихле вершина *M* с наибольшей степенью будет соединена с 5 или 6 другими вершинами (больше 6 степень быть не может, т.к из вершины может выходить максимум 6 диагоналей). Если у неё степень 6, то вершины, с которыми соединена M, между собой не соединены (иначе возникает треугольник). Значит, возможны ещё 6·2=12 отрезков от них к соседкам вершины M и диагональ между соседками M. Всего максимум 6+12+1=19 отрезков, но если все они есть, то два из них будут на самом деле сторонами, соединяющими соседок *M* со следующими вершинами из рассматриваемой шестёрки. Противоречие. Если же все степени максимум 5, то рассмотрим множество *A* из пяти вершин, соединённых с *M*, и множество *B* из трёх вершин, несоединенных с *M*. Тогда возможны 2 случая – все вершины из *A* идут подряд или эти вершины разбиты на 2 части подряд идущих некоторой вершиной *X* из B, а две другие вершины из *B* являются соседками *M*. Разобрав оба случая, мы убедимся, что у нас возникают треугольники при наличии минимум 19 диагоналей. Значит, диагоналей не более 18.

2. В каждой клетке шахматной доски написано натуральное число. Вася за один ход может увеличить на единицу числа. находящиеся в любом трёхклеточном уголке. Всегда ли Вася за несколько ходов сможет сделать все числа на доске равными?

Ответ: Да, всегда. ***Доказательство*:** Докажем, что всю доску без любой одной клетки (назовём её *дыркой*) можно разбить на уголки. Если доску разбить на 4 угловых квадрата 4×4 и 16 квадратов 2×2, то дырка попадает в один из квадратов 2×2. который в свою очередь попадает в какой-то из 4-х угловых квадратов. Вырежем в трёх полных квадратах 4×4 по клетке, которые образуют уголок в центре доски, и этот уголок входит в наше разбиение. Теперь в каждом квадрате 4×4 не хватает клетки, которая входит в один из квадратов 2×2. на которые разбит квадрат 4×4. Тогда аналогично вырежем из каждого полного квадрата 2×2 в пределах квадрата 4×4 по одной клетке в центре квадрата 4×4, который образуют уголок нашего разбиения. В результате в каждом квадрате осталось по три клетки. образующие уголок. Итак, нами доказано, что доска 8×8 без одной клетки-дырки разбивается на 21 трёхклеточный уголок (см. пример разбиения на рис.). Теперь фактически ситуация добавить по единице в каждую клетку всех уголков разбиения эквивалентна задаче ровно в одной клетке (дырке) уменьшить число на 1. Выбирая по очереди все клетки, отличные от клеток с самым маленьким числом, мы постепенно все остальные числа сделаем равными самому маленькому. Тогда в нашей исходной задаче подобный алгоритм увеличения сделает все числа равными.



Комментарий: Разбиение доски $2^n \times 2^n$ на уголки является классическим фактом и доказывается по индукции (см. стр. 86-91 в самой знаменитой книге олимпиадника-математика «Ленинградские математические кружки»).

3. Вова расставляет 2016 флагов на окружности длины 1. Дима встаёт в некоторую точку и, двигаясь вдоль окружности, собирает все флаги (возвращаться в исходную точку не требуется). Для какого наименьшего расстояния *L* Диме гарантированно удастся пройти путь не более *L*, вне зависимости, как расставил флаги Вова?

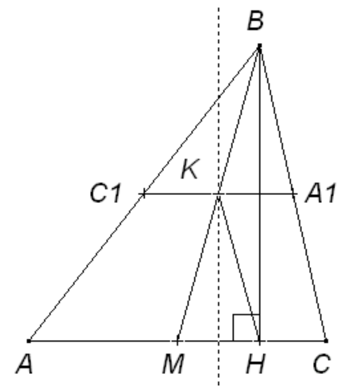
Ответ: 2015/2016. ***Доказательство*:** Если Вова расставит флаги в виде правильного 2016-угольника через 1/2016, то Диме в любом случае придётся пройти хотя бы 2015/2016. При этом при любой расстановке флагов по принципу Дирихле самый длинный промежуток между соседними флагами будет не меньше 1/2016. Тогда Дима выберет один из флагов на концах этого промежутка и пойдёт от него в другую сторону от этого промежутка, пройдя тем самым не более 2015/2016.

4. Докажите, что существует такое натуральное число *n*, что 3^n даёт при делении на *n* остаток, больший 1000000.

Решение: Рассмотрим, любую степень тройки, большую миллиона, например. $3^{18}=(3^3)^6>10^6$. Возьмём теперь число $n=2\cdot 3^{18}>18$. Тогда нечётное число 3^n делится на 3^{18}, но не делится на чётное число $n=2\cdot 3^{18}$, значит, при делении на него даёт остаток 3^{18}, который больше миллиона.

5. Докажите, что в остроугольном треугольнике *ABC* основание высоты *BH* и середина *M* стороны *AC* симметричны относительно серединного перпендикуляра к одной из средних линий треугольника.

***Решение*:** Пусть C_1A_1 – средняя линия треугольника, параллельная стороне *AC*, тогда середина *K* этой средней линии и середина *M* стороны *AC* лежат на одной прямой с точкой *B* (согласно лемме о трапеции) и *K* делит отрезок *BM* пополам (по теореме Фалеса). Значит, в прямоугольном треугольнике *BKH* медиана из прямого угла *HK* равна половине гипотенузы, т.е *HK*=*MK*. Тогда треугольник *MKH* – равнобедренный и серединный перпендикуляр к отрезку C_1A_1 является осью симметрии этого треугольника, значит, *M* и *H* симметричны относительно этого серединного перпендикуляра. Что и требовалось доказать. В случае же равнобедренного треугольника (*AB*=*BC*) точки *M* и *H* совпадают и попадают на серединный перпендикуляр, значит. симметричны относительно него.



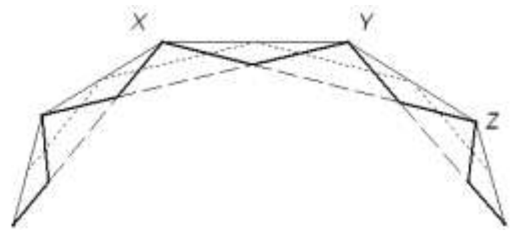
6. В парламенте каждый депутат сочиняет один законопроект за 5 минут. Рабочий день длится 6 часов, но, приходя на работу, каждые два депутата в течение 5 минут приветствуют друг друга. Во время приветствий депутаты законопроектов не сочиняют. Сколько депутатов должно быть в парламенте, чтобы ежедневно там вырабатывалось наибольшее количество законопроектов?

Ответ: 36 или 37. ***Доказательство:*** Пусть в парламенте n депутатов, тогда у каждого депутата $5(n–1)$ минут уходит на болтовню-приветствия, а далее он сочиняет $(360–5(n–1)):5 = 73–n$ закона. Значит, все депутаты сочинят $n(73–n)$ закона. Из неравенства Коши следует (оба числа неотрицательны), что $\sqrt{n(73-n)} \le \frac{n+(73-n)}{2} = 36{,}5$. Значит, $n(73–n) \le 36{,}5^2 =1332{,}25$, т.е. не больше $36\cdot 37=1332$. При этом заметим, что пример для обоих случаев (36 и 37) существует. Для 36 депутатов составляем расписание их болтовни за 35 пятиминуток (фактически проведя между ними турнир в 35 туров), далее каждый из них написал по 37 законопроектов. При 37 депутатах устраиваем турнир в 37 туров, у каждого депутата есть ещё одна пятиминутка отдыха от болтовни, в течение которой он осчастливливает страну ещё одним законопроектом. Затем каждый из них пишет ещё 35 законопроектов. Таким образом, каждый создал по 36 законопроектов, что в сумме также даёт 36·37.

<u>Комментарий:</u> Нам ещё требуется отдельно рассказать как строится турнир на 36 и 37 участников либо с помощью таблицы, либо графа.

7. В выпуклом многоугольнике периметра *P* соединяются середины соседних сторон, образуя новый многоугольник периметра *T*. Докажите, что $T \le P \le 2T$.

***<u>Доказательство</u>*:** 1) Рассмотрим маленькие треугольники около каждой вершины, состоящие из половинок соседних сторон и отрезка, соединяющего середины. Тогда сумма таких двух половинок больше отрезка между серединами. Если просуммировать все неравенства по всем таким треугольничкам, то выполнится неравенство $T<P$.

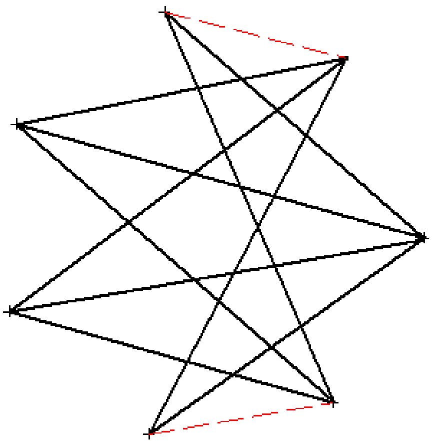


2) Заметим, что отрезок, соединяющий середины любых двух соседних сторон *XY* и *YZ* равен половине диагонали *XZ*, т.к. является средней линией треугольника *XYZ*. Значит, нам надо доказать, что периметр многоугольника *P* меньше суммы длин всех диагоналей, соединяющих вершины через одну. Тогда в силу неравенства треугольника каждая сторона *XY* будет меньше суммы длин двух кусочков двух таких диагоналей – выходящей из *X* по часовой стрелке и из *Y* против часовой стрелки (см. рис.). При этом на каждой диагонали ещё остаются кусочки, которые только увеличивают сумму длин диагоналей. Значит, верно неравенство $P<2T$.

8. Найдите все наборы различных простых чисел *p, q, r, s*, удовлетворяющих равенству $1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}-\frac{1}{s}=\frac{1}{pqrs}$.

<u>Ответ:</u> Все наборы вида (2, 3, 7, 43) в любом порядке. ***<u>Решение:</u>*** С точностью до симметрии будем считать, что числа упорядочены $p<q<r<s$. Пусть $p \ge 3$, тогда $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{pqrs} \le \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot11}=\frac{887}{1155}<1$, значит, $p=2$. Пусть $q \ge 5$, тогда $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{pqrs} \le \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{2\cdot5\cdot7\cdot11}=\frac{621}{770}<1$, значит, q=3. Остаётся решить уравнение $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{6rs}=1$, которое равносильно уравнению $6r+6s+1=rs$. А его решаем разложением на множители $(r-6)(s-6)=37$, откуда в силу простоты числа 37 первый множитель равен 1, второй – 37. Значит, $r=7,\ s=43$.

<u>3 тур. Старт-лига первая. *Решения*.</u>



1. Какое наибольшее количество диагоналей можно провести в выпуклом семиугольнике, чтобы никакие три из них не образовывали треугольник с вершинами в вершинах семиугольника?

<u>Ответ:</u> 10. ***<u>Пример:</u>*** Например, разобьём вершины на две группы (4 и 3) подряд идущих вершин и проведём все диагонали между вершинами из разных групп, всего 4·3–2=10 диагоналей (см. рис.). 2 отрезка между соседними вершинами из разных групп будут стороной, а не диагональю (отмечены пунктиром, как не проведённые). Получается двудольный граф, в котором по критерию двудольности все циклы чётные, значит, нет треугольника из рёбер (цикла длины 3). ***<u>Доказательство оценки</u>*:** Если же у нас проведено хотя бы 11 диагоналей, то сумма степеней всех вершин будет не меньше 2·11=22, значит, по принципу Дирихле вершина *M* с наибольшей степенью будет соединена с 4 другими вершинами (больше 4 степень быть не может, т.к. из вершины может выходить максимум 4 диагонали). Если у неё степень 4, то вершины, с которыми соединена *M*, между собой не соединены (иначе возникает треугольник). Значит, возможны ещё 4·2=8 отрезков от них к соседкам вершины *M*, но две из них будут на самом деле сторонами, соединяющими соседок М со следующими вершинами из рассматриваемой четвёрки. Значит, максимум 6+4=10 диагоналей. Противоречие.

2. В каждой клетке таблицы 2016×2016 написано натуральное число. Вася за один ход может увеличить на единицу числа, находящиеся в любом трёхклеточном уголке. Всегда ли Вася за несколько ходов сможет сделать все числа на доске равными?

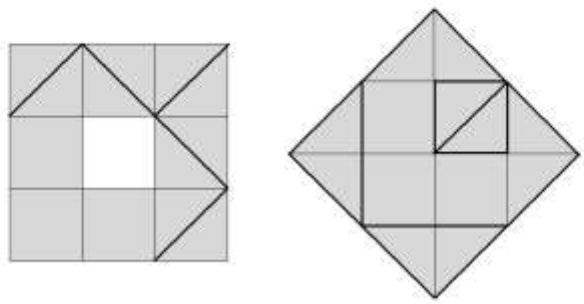
<u>Ответ:</u> Нет, не всегда. ***<u>Контрпример</u>*:** Пусть изначально в таблице были написаны числа в сумме с остатком 1 при делении на 3, например, в каждой клетке 3. кроме одной, в которой написана 1. Тогда при данных операциях сумма всех чисел увеличивается на 3. значит. сохраняет остаток 1 при делении на 3. Но тогда она никогда не станет кратной 3, значит, и кратной 2016^2 (делится на 3), т.е. все числа не смогут стать равными натуральными числами.

3. Вова расставляет 2016 флагов на окружности длины 1. Дима встаёт в некоторую точку и, двигаясь вдоль окружности, собирает все флаги (возвращаться в исходную точку не требуется). Для какого наименьшего расстояния *L* Диме гарантированно удастся пройти путь не более *L*, вне зависимости, как расставил флаги Вова?

<u>Ответ:</u> 2015/2016. ***<u>Доказательство</u>*:** Если Вова расставит флаги в виде правильного 2016-угольника через 1/2016, то Диме в любом случае придётся пройти хотя бы 2015/2016. При этом при любой расстановке флагов по принципу Дирихле самый длинный промежуток между соседними флагами будет не меньше 1/2016. Тогда Дима выберет один из флагов на концах этого промежутка и пойдёт от него в другую сторону от этого промежутка, пройдя тем самым не более 2015/2016.

4. Можно ли квадрат 3×3 без центральной клетки разрезать на 5 частей, из которых складывается целый квадрат?

<u>Ответ:</u> можно, см. пример.



5. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{19}{20}$.

<u>Ответ:</u> 6 наборов вида (2, 4, 5) в любом порядке. ***<u>Решение</u>*:** С точностью до симметрии будем считать, что числа упорядочены $p \le q \le r$. Заметим, что они не меньше 2. Будем рассматривать упорядоченные тройки (p, q, r), пользуясь тем, что тройки (2, 3, 6), (2, 4, 4) и (3, 3. 3) дают нам в сумме дробей 1. Тогда перебирая тройки (2, 3, 7), (2, 3, 8), (2, 3, 9), (2, 4, 5), (3, 3, 4), (3, 3, 5), (3, 4, 4), мы придём к выводу, что подойдёт только тройка (2, 4, 5). Большие же тройки будут давать сумму, меньшую 19/20.

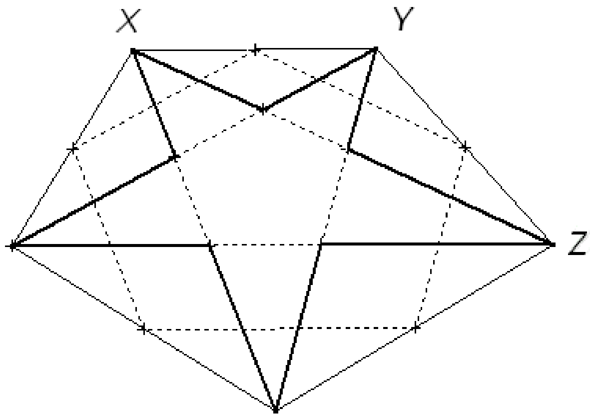
6. В парламенте каждый депутат сочиняет один законопроект за 5 минут. Рабочий день длится 6 часов, но, приходя на работу, каждые два депутата в течение 5 минут приветствуют друг друга. Во время приветствий депутаты законопроектов не сочиняют. Сколько депутатов должно быть в парламенте, чтобы ежедневно там вырабатывалось наибольшее количество законопроектов?

Ответ: 36 или 37. ***Доказательство:*** Пусть в парламенте n депутатов, тогда у каждого депутата $5(n–1)$ минут уходит на болтовню-приветствия, а далее он сочиняет $(360–5(n–1)):5 = 73–n$ закона. Значит, все депутаты сочинят $n(73–n)$ закона. Из неравенства Коши следует (оба числа неотрицательны), что $\sqrt{n(73-n)} \le \frac{n+(73-n)}{2} = 36{,}5$. Значит, $n(73–n) \le 36{,}5^2 = 1332{,}25$, т.е. не больше $36\cdot37=1332$. При этом заметим, что пример для обоих случаев (36 и 37) существует. Для 36 депутатов составляем расписание их болтовни за 35 пятиминуток (фактически проведя между ними турнир в 35 туров), далее каждый из них написал по 37 законопроектов. При 37 депутатах устраиваем турнир в 37 туров, у каждого депутата есть ещё одна пятиминутка отдыха от болтовни, в течение которой он осчастливливает страну ещё одним законопроектом. Затем каждый из них пишет ещё 35 законопроектов. Таким образом, каждый создал по 36 законопроектов, что в сумме также даёт $36\cdot37$.

Комментарий: Нам ещё требуется отдельно рассказать как строится турнир на 36 и 37 участников либо с помощью таблицы, либо графа.

7. В выпуклом пятиугольнике периметра *P* соединяются середины соседних сторон, образуя новый пятиугольник периметра *T*. Докажите, что *P*≤2*T*.

***Доказательство*:** Заметим, что отрезок, соединяющий середины любых двух соседних сторон *XY* и *YZ* равен половине диагонали *XZ*, т.к. является средней линией треугольника *XYZ*. Значит, нам надо доказать, что периметр пятиугольника *P* меньше суммы длин всех диагоналей, соединяющих вершины через одну, т.е. пятиконечной самопересекающейся везды. Тогда в силу неравенства треугольника каждая сторона *XY* будет меньше суммы длин двух кусочков двух таких диагоналей – выходящей из *X* по часовой стрелке и из *Y* против часовой стрелки (см. рис.). При этом на каждой диагонали ещё остаются кусочки, которые только увеличивают сумму длин диагоналей. Значит, верно неравенство *P*<2*T*.



8. Найдите все решения ребуса: $\overline{ВОКАЛИСТ} - \overline{ЛИСТОВКА} = 7654321$. **(*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*)**

Ответ: У ребуса нет решений. ***Решение 1 (авторское, с помощью идеи, под которую задача создавалась):*** Заметим, что у чисел одинаковая сумма цифр, значит, они в силу свойства равноостаточности имеют одинаковый остаток при делении на 3 (или 9), тогда их разность делится на 3 (или 9), а число 7654321 на 3 (или 9) не делится. ***Решение 2 (побочное):*** В разряде единиц могла получится цифра 1 только в случаях, если $T–A=1$ или $T=0$, $A=9$ (произошёл перенос 1 из предыдущего разряда). Тогда в пятом разряде даже с учётом возможного переноса единички в предыдущий разряд разность $A–T$ должна равняться 9 или 8 в обоих случаях, значит, мы не могли получить 5 в этом разряде в разности.