XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
X Южный математический турнир.
Старт-лига. 1 тур. 27 сентября 2015 года.

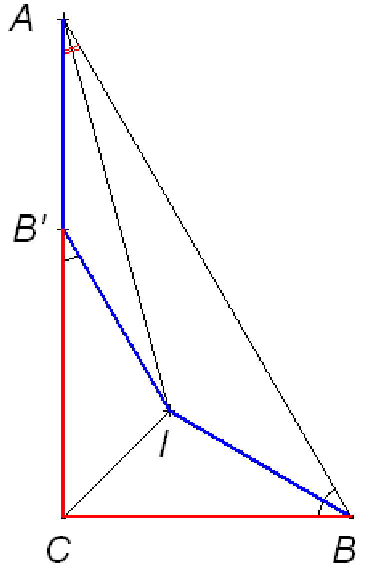
<u>Высшая лига.</u> Решения.

1. Есть 88 яблок, средний вес яблока равен 100 г. Средний тех вес яблок, которые легче 100 г, равен 85 г. Средний вес тех яблок, которые тяжелее 100 г, равен 135 г. Какое наименьшее число яблок может иметь вес ровно 100 г? (*Швеция-2014, по мотивам*)

<u>Ответ:</u> 8 яблок, например, 8 яблок по 100 г, 56 яблок по 85 г и 24 яблока по 135 г.
<u>Доказательство оценки:</u> . Пусть есть m яблок легче 100 г и n яблок тяжелее 100 г. Их общий вес равен $85m+135n$ г, а средний – 100 г, откуда $85m+135n = 100(m+n) \Leftrightarrow 35n=15m \Leftrightarrow 7n=3m$. Значит, n кратно 3, m кратно 7, и $m/7=n/3=k$ – целое. Тогда $m+n=10k$ – кратно 10. Поэтому яблок, чей вес не равен 100 г, не более 80. Значит, яблок с весом 100 г не менее 8.

2. В одной капле живут «амёбы-рыцари», которые всегда говорят правду, и «амёбы-лжецы», которые всегда лгут. Особенность их в том, что, сделав какое-то заявление, каждая из них меняет свой тип: «амёба-рыцарь» становится «амёбой-лжецом» и наоборот. Однажды миллион амёб расположились по кругу. Начав с амёбы Жени и обойдя круг по часовой стрелке, их всех по очереди спросили: «Твои соседи сейчас одного типа?». Затем снова, начав с Жени и обойдя круг против часовой стрелки, им всем задали тот же вопрос. Все ответы были «Да» или «Нет». Какое наибольшее число ответов «Да» могло быть? (*Е.Исаак, А.Шаповалов, О.Южаков*)

<u>Ответ:</u> 1000002. ***<u>Решение:</u>***
Сравним ответы одной и той же амёбы в первый и второй раз. Женю спросили два раза подряд, она сменила тип, а её соседи – нет, поэтому ответы противоположны. Будем считать, что сосед по часовой стрелке – слева. Пусть слева от Жени – Саша, справа – Олег. У Саши между вопросами левый сосед сменил тип дважды, а он сам и Женя справа – по разу, поэтому ответ Саши не изменился. У Олега сосед справа не изменился, а он сам и Женя справа сменили тип по разу, поэтому ответ Олега не изменился. У любой другой амёбы сосед слева сменил тип дважды, сосед справа типа не менял, а она сама сменила тип, поэтому ответ изменился на противоположный. Итак, кроме Олега и Саши, все остальные по разу сказали «Да». Олеги и Саша могли сказать «Да» по 2 раза, поэтому ответов «Да» не более 1000002. Такое возможно: пусть изначально Саша, Женя и Олег – рыцари, слева от Саши – лжец.



3. *I* – точка пересечения биссектрис в прямоугольном треугольнике *ABC* с гипотенузой *AB*. Известно, что *AC*=*BC*+*BI*. Найдите углы *A* и *B*. (*О.Южаков*)

<u>Ответ:</u> $\angle A=30°$, $\angle B=60°$. ***<u>Решение:</u>*** Пусть $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\alpha+\beta=90°$. Отметим на отрезке AC такую точку B', что $AB'=BI$, $CB'=CB$. Отрезки BI и $B'I$ равны в силу симметрии относительно биссектрисы *CI*, значит, треугольник *AB'I* равнобедренный. Тогда $\angle B'IA=\angle B'AI=\alpha/2$, $\angle CB'I=\angle B'IA+\angle B'AI=\alpha$ (как внешний угол треугольника *AB'I*) и также в силу симметрии $\angle CB'I=\angle CBI=\beta/2$. Получаем систему из двух уравнений $\alpha=\beta/2$ и $\alpha+\beta=90°$, откуда $\alpha=30°$, $\beta=60°$.

4. Во время операции «Перехват» на кольцевой дороге стоят с равными промежутками 100 человек, среди них 50 – инспектора ГИБДД и 50 – сотрудники ФСБ. Докажите, что расстояние по кольцу между наиболее удаленными друг от друга инспекторами равно расстоянию по кольцу между наиболее удаленными друг от друга сотрудниками ФСБ. (*По мотивам Indian postal coaching-2012*)

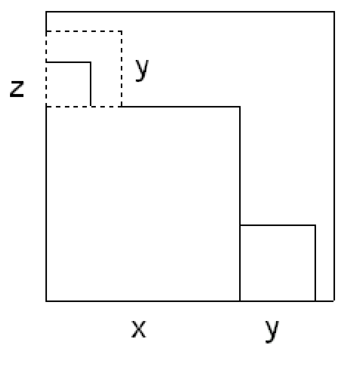
Решение: Будем считать инспекторов ГИБДД синими точками, сотрудников ФСБ – красными, а расстояние между соседними точками равным 1. Наиболее удалены друг от друга диаметрально противоположные точки – на расстояние 50.

Случай 1. Есть две противоположные точки *A* и *B* одинакового цвета, скажем, синего. Рассмотрим все точки, противоположные 50 красным точкам. Среди них нет точек *A* и *B*, поэтому синих среди них не более 48. Значит, найдутся две противоположные точки красного цвета *C* и *D*, и расстояния *AB* и *CD* оба равны 50.

Случай 2. Нет противоположных точек одинакового цвета. Тогда любое расстояние между одноцветными точками не больше 49. Найдем две соседние точки разного цвета, скажем *C* – синяя, и слева от неё *K* – красная. Диаметрально противоположные к ним точки обозначим *C'* и *K'* соответственно. В нашем случае их цвета противоположны, то есть *C'* – красная, а *K'* – синяя. Но тогда дуги *CK'* и *C'K* не пересекаются, их длины равны 49 и у первой концы синие, у второй – красные.

5. Есть три квадрата общей площадью 1дм^2. Докажите, что их можно без наложений поместить в плоскую квадратную коробку площадью 2 дм^2. (*По мотивам задачи Всесоюзной олимпиады 1972 г.*)

Решение: Упорядочим стороны наших квадратов $x\geq y\geq z>0$. По условию $x^2+y^2<1$, значит, $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=2(x^2+y^2)-(x^2+y^2)+2xy<2-(x-y)^2$ <2. Тогда $x+y\leq\sqrt{2}$, значит, квадраты можно будет разместить в квадрате со стороной $\sqrt{2}$ (площади 2) так, как показано на рисунке. При этом квадрат со стороной *z* уместится сверху, т.к. он по размеру не превосходит квадрат со стороной *y*.



Комментарий: нужное нам неравенство $x+y\leq\sqrt{2}$ можно также доказать другими способами, например, с помощью неравенства между средним арифметическим и средним квадратическим ($\frac{x+y}{2}\leq\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\leq\sqrt{\frac{1}{2}}$) или неравенства Коши ($\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ для неотрицательных чисел) между средним геометрическим и средним арифметическим ($(x+y)^2=x^2+y^2+2xy\leq1+2\sqrt{x^2y^2}\leq1+2\cdot\frac{x^2+y^2}{2}=2$, откуда получим $x+y\leq\sqrt{2}$).

6. Рассматриваются всевозможные 100-значные числа, где каждая цифра равна 3 или 5. У каждого вычисляется остаток от деления на 1024. Сколько среди этих остатков разных? (*С.Волченков*)

Ответ: 512. ***Решение*:** Заметим, что чётных остатков быть не может, значит, всего их не более 512. Вычтем из каждого числа 100-значное число T, состоящее из троек. У новых чисел остатки останутся различными, если они различались вначале. Новые числа будут содержать только нули и двойки. Разделим их на 2. Теперь числа состоят только из нулей и единиц, а нам надо рассмотреть остатки при делении на 512.

Пусть у некоторых двух новых чисел одинаковые остатки при делении на 512. Тогда их разность делится на 512 (а разность исходных чисел – на 1024). Последняя ненулевая цифра разности нечётна, значит, по признаку делимости на степень двойки, последние 9 цифр – нули. Итак, любая комбинация нулей и единиц на последних 9 местах однозначно определяет остаток от деления на 512. Таких комбинаций $2^9=512$. Обратные операции (умножение на 2 и прибавление T) превращают эти комбинации в исходные числа с разными остатками от деления на 1024.

7. Петя разбил на пары все натуральные числа от 2012 до 2019 и сложил произведения чисел в своих четырёх парах, получив число *P*. Вася разбил эти же числа на пары по-другому и тоже сложил произведения чисел в своих четырёх парах, получив число *V*. Может ли быть, что *P*=*V*? (*Д.Кузнецов*)

Ответ: Да, может, например, две суммы попарных произведений $P=(n-3)\cdot(n+4)+(n-2)\cdot(n+3)+(n-1)\cdot(n+1)+n\cdot(n+2)$ и $V=(n-3)\cdot(n+3)+(n-2)\cdot(n+4)+(n-1)\cdot(n+2)+n\cdot(n+1)$ будут равны $4n^2+4n-19$ при $n=2015$.

8. Из 3 жёлтых и 3 синих палочек сложен шестиугольник так, что на его контуре цвета палочек чередуются. Из каждых трёх подряд идущих палочек можно сложить треугольник. Докажите, что из палочек какого-то из цветов тоже можно сложить треугольник. (*А.Шаповалов*)

***Решение*:** Обозначим стороны по кругу a, b, c, d, e, f. Пусть f – наибольшая, тогда $f<d+e$, $f<e+a$, $f<a+b$. Если $f<b+d$, одноцветный треугольник найден. Пусть $f\geq b+d$. Тогда $a>d$, $e>b$. Докажем, что из одноцветных палочек (a, e, c) можно сложить треугольник. Наибольшая из этих палочек либо a или c (с точностью до симметрии). Если это c, то $a+e>b+d>c$ – неравенство треугольника выполнено. А если наибольшая a, то $e+c>b+c>a$, то есть (a, e, c) будет треугольником и в этом случае.